河北省普通高等学校专升本考试
数学与应用数学专业考试说明

第一部分：数学分析

I.课程简介

一、内容概述与要求

数学分析是数学与应用数学专业的一门重要专业基础课程，掌握数学分析的基本理论体系及思想方法对进一步学习和研究具有重要意义。考生应理解《数学分析》中实数的完备性定理；掌握函数、极限、连续、一元函数微积分学、多元函数微积分学、数项级数及函数项级数等相关章节的基本概念与基本理论，掌握上述各部分的基本方法；注意各部分知识结构及知识的内在联系。考生应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力；能运用基本概念、基本理论和基本方法正确推理地证明，准确简捷地计算；能运用所学知识分析并解决简单的实际问题。考试从三个层次上对考生进行测试，较高层次的要求为“理解”和“掌握”，较低层级的要求为“了解”。这里“理解”和“了解”两词分别是对概念、理论的高层次与低层次要求。“掌握”是对方法、运算的高层次要求。本说明下列用语的含义：了解是指清楚地知道，理解是指懂得涵义、特征以及与相关理论的关系，运用是指用以解决基本问题，掌握是指理解并能运用。

二、考试形式与试卷结构

考试形式：采用闭卷、笔试形式，全卷满分为 300 分，考试时间为 150 分钟。

试卷结构：试卷包括选择题、填空题、判断题、计算题、证明题和应用题。选择题是四选一型的单项选择题；填空题只要求直接填写结果，不必写出计算过程或推证过程；计算题、证明题均应写出文字说明、演算步骤或推证过程。

试卷中《数学分析》、《高等代数》与《解析几何》试题的分值比例约为 150:110:40

II.知识要点与考核要求

一、实数集与函数

（一）知识要点

1. 邻域、去心邻域、左邻域、右邻域的概念.

2. 有界数集的定义，数集的上确界、下确界的定义，确界原理.

3. 函数、反函数及复合函数的概念，函数的单调性、有界性、周期性、奇偶性，基本初等函数、初等函数的概念.

（二）考核要求

了解内容

1. 实数的无限小数表示法.

理解内容

1. 区间与邻域的概念，有界集及确界概念.

2. 函数及复合函数、反函数、初等函数的概念.

掌握内容

1. 数集上确界、下确界的定义，确界原理.

2. 求函数的定义域.

3. 函数的简单性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性），基本初等函数的性质.

4. 将一个复合函数分解为基本初等函数或简单函数的复合的方法.

二、数列极限

（一）知识要点

1. 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义.

2. 收敛数列性质，极限的四则运算法则，数列的敛散性与其子列敛散性的关系.

3. 迫敛性定理，单调有界原理，数列的柯西收敛准则.

（二）考核要求

了解内容

1. 极限的历史.

理解内容

1. 极限的概念.

2. 极限的思想.

3. 柯西准则

掌握内容

1. 用数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2.用数列极限的定义及收敛数列的性质进行相关结论的证明.

3.用四则运算法则、迫敛性定理、单调有界定理证明数列收敛并求极限.

4.用数列极限与其子数列极限之间的关系证明数列发散.

三、函数极限

（一）知识要点

1.自变量各种趋势下函数极限的精确定义.

2.左极限、右极限与极限的关系.

3.函数极限的性质，函数极限的四则运算法则.

4.归结原则，柯西准则.

5.两个重要极限.

6.无穷小量的定义及性质，无穷小量阶的比较，用等价无穷小代换求极限.

7.无穷大量的定义，无穷大量与无穷小量的关系.

8.曲线的水平渐近线、垂直渐近线、斜渐近线.

（二）考核要求

了解内容

1.极限的几何意义.

理解内容

1.无穷大、无穷小以及无穷小的阶的概念，无穷小的性质，无穷小量阶的比较，无穷小量与无穷大量的关系.

2.曲线渐近线的几何意义，渐近线的求法.

3.归结原理，柯西准则.

掌握内容

1.函数极限的精确定义，左极限、右极限与极限的关系.

2.用函数极限的性质证明与函数极限相关的结论.

3.用极限四则运算法则求极限.

4.用两个重要极限求极限.

5.用等价无穷小求极限.

四、函数的连续性

（一）知识要点

1. 函数在一点连续的定义，左连续、右连续与连续的关系.

2. 函数的间断点及其分类.

3. 连续函数的运算与初等函数的连续性.

4. 函数在某点连续的局部性质，闭区间上连续函数的性质（有界性定理、最值定理、介值定理及零点存在定理）.

5. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义，一致连续性定理.

（二）考核要求

了解内容

1. 黎曼函数的定义及其性质.

理解内容

1. 函数在一点连续与间断的概念.

2. 反函数的连续性.

3. 函数在一点连续的局部性质.

4. 一致连续的定义，一致连续性定理.

掌握内容

1. 判断简单函数（含分段函数）在一点的连续性质.

2. 求函数的间断点，确定间断点的类型.

3. 初等函数在其定义区间上连续性.

4. 运用闭区间上连续函数的性质(有界性定理、最大最小值定理、介值定理、零点定理)推证一些简单命题.

五、导数与微分

（一）知识要点

1. 导数的概念，导数的几何意义与物理意义.

2. 函数的可导性与连续性的关系.

3. 导数的基本公式，求导的四则运算法则，复合函数的求导法则.

4. 高阶导数的概念及求法.

5. 参变量函数的一阶导数和二阶导数的求法.

6. 微分的定义，微分的几何意义，微分与导数的关系，微分法则，一阶微分形式不变性.

（二）考核要求

了解内容

1. 微分的几何意义.

2. 用微分做近似计算和误差估计.

理解内容

1. 函数的微分概念.

2. 一阶微分形式不变性.

3. 反函数的求导法则.

掌握内容

1. 导数、左导数、右导数的概念，判断函数在某点的可导性，用导数定义求导数.

2. 函数的可导性与连续性之间的关系.

3. 导数的几何意义和物理意义，求曲线上一点处的切线方程与法线方程.

4. 用导数基本公式、导数的四则运算法则、复合函数的求导法则求函数的导数.

5. 微分与导数的关系，微分运算法则，求初等函数的微分.

6. 高阶导数的概念，求初等函数的高阶导数.

7. 求参变量函数的一阶、二阶导数.

六、微分中值定理及其应用

（一）知识要点

1. 罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理，泰勒公式.

2. 判定函数单调性，求函数的极值，求函数的最值.

3. 判定曲线凹凸性，求曲线的拐点.

4. 洛必达法则，求不定式的极限.

5. 函数图像的讨论.

（二）考核要求

了解内容

1. 导数极限定理.

2. 导函数的介值定理.

理解内容

1.函数极值的概念.

2.罗尔定理、拉格朗日中值定理及其几何意义，柯西中值定理.

3.泰勒中值定理，泰勒公式.

4.描绘简单函数的图形.

掌握内容

1.用罗尔定理、拉格朗日中值定理证明简单的不等式和证明方程根的存在性.

2.用导数判定函数的单调性及求函数的单调增、减区间，利用函数的增减性证明简单的不等式.

3.用二阶导数判定曲线的凹凸性，求曲线的凹凸区间及拐点.

4.求函数的极值与最值.

5.求各种不定式极限.

6.解决简单的最大（小）值的应用问题.

七、实数的完备性

（一）知识要点

1.闭区间套定理.

2.聚点的定义及聚点定理.

3.有限覆盖定理.

（二）考核要求

了解内容

1.实数完备性基本定理的等价性.

理解内容

1.集合的开覆盖、有限开覆盖的概念，有限覆盖定理.

掌握内容

1.区间套定理.

2.找出集合的聚点，聚点定理.

八、不定积分

（一）知识要点

1.原函数与不定积分的概念，原函数存在定理.

2.不定积分的基本积分公式.

3. 不定积分的线性运算法则.

4. 不定积分的第一换元积分法、第二换元积分法、分部积分法.

5. 有理函数的积分法，简单无理函数及三角函数有理式的积分法.

（二）考核要求

了解内容

1. 不定积分的几何意义.

理解内容

1. 原函数与不定积分的概念.

2. 求有理函数的不定积分，求三角函数有理式及简单无理函数的不定积分.

掌握内容

1. 不定积分的基本公式.

2. 不定积分的线性运算法则.

3. 用第一换元积分法、第二换元积分法、分部积分法求不定积分.

九、定积分

（一）知识要点

1. 定积分的概念及其几何意义.

2. 定积分的性质.

3. 积分第一中值定理.

4. 变上限定积分，原函数存在定理.

5. 可积函数类.

6. 牛顿—莱布尼兹公式，定积分的换元法、分部积分法.

（二）考核要求

了解内容

1. 第一积分中值定理的推广形式，第二积分中值定理.

理解内容

1. 定积分的概念与几何意义.

2. 可积的必要条件.

3. 三类可积函数.

掌握内容

1. 定积分的性质.

2. 变上限积分，原函数存在定理，变上限函数的导数.

3. 用牛顿—莱布尼兹公式，定积分的换元法和分部积分法计算定积分.

4. 证明一些简单的积分恒等式.

十、定积分的应用

（一）知识要点

1. 平面图形的面积.

2. 曲线的弧长.

3. 平行截面面积为已知的立体体积、旋转体的体积.

4. 旋转曲面的面积.

5. 用定积分求物理量.

（二）考核要求

了解内容

1. 曲率、曲率圆、曲率半径、曲率中心等概念.

理解内容

1. 微元法的思想.

掌握内容

1. 求平面图形的面积.

2. 求平面曲线的弧长.

3. 求平行截面面积为已知的立体体积，简单的封闭平面图形绕坐标轴旋转所成旋转体的体积.

4. 求平面曲线绕坐标轴旋转所成旋转面的面积.

5. 求变力所作的功（质点沿直线运动）.

十一、反常积分

（一）知识要点

1. 无穷积分的定义、性质及敛散性的判别.

2. 瑕积分的定义、性质及敛散性的判别.

（二）考核要求

了解内容

1. 两类反常积分的几何意义.

2. 两类反常积分的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法.

3. 用柯西准则判定两类反常积分的收敛性.

理解内容

1. 两类反常积分收敛、发散的概念；两类反常积分条件收敛和绝对收敛的概念.

2. 用比较原则，比较原则的极限形式，柯西判别法，柯西判别法的极限形式判定两类非负函数反常积分的敛散性.

掌握内容

1. 根据定义判定反常积分的敛散性，求收敛的反常积分的值.

十二、数项级数

（一）知识要点

1. 级数的概念，级数收敛和发散的定义.

2. 级数的基本性质，级数收敛的必要条件.

3. 级数收敛的柯西准则.

4. 正项级数敛散性的判别法（比较判别法、比式判别法及其极限形式、根式判别法及其极限形式、积分判别法.）

5. 交错级数及其莱布尼兹判别法.

6. 级数绝对收敛与条件收敛的定义及判别.

7. 一般项级数的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

（二）考核要求

了解内容

1. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法.

2. 绝对收敛级数的性质.

理解内容

1. 级数收敛、发散的概念.

2. 正项级数敛散性的积分判别法.

3. 用柯西准则判别级数的敛散性.

掌握内容

1. 用定义判别级数的敛散性，求收敛级数的和.

2. 用级数收敛的必要条件判别级数发散.

3. 几何级数的敛散性，p 级数的敛散性.

4. 用级数的基本性质判别级数的敛散性.

5. 用比较判别法、比式判别法及其极限形式、根式判别法及其极限形式判别正项级数的敛散性.

6. 用莱布尼兹判别法判别交错级数收敛.

7. 判别级数条件收敛和绝对收敛.

十三、函数列与函数项级数

（一）知识要点

1. 函数项级数的一致收敛的优级数判别法.

2. 一致收敛的函数列与函数项级数的性质.

（二）考核要求

了解内容

1. 函数列一致收敛的柯西准则.

2. 函数项级数一致收敛的柯西准则.

理解内容

1. 函数列及函数项级数一致收敛的定义.

2. 函数列一致收敛与函数项级数一致收敛之间的关系.

掌握内容

1. 函数项级数一致敛的优级数判别法.

2. 一致收敛函数列的极限函数的连续性、可积性、可微性.

3. 一致收敛函数项级数的和函数的连续性、逐项积分、逐项求导.

十四、幂级数

（一）知识要点

1. 幂级数的概念，幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域.

2. 幂级数的基本性质.

3. 将初等函数展开为幂级数.

（二）考核要求

了解内容

1.幂级数的概念.

2.泰勒级数的定义.

理解内容

1.两个幂级数和与差的收敛半径.

掌握内容

1.求幂级数的收敛半径、收敛域的方法（包括判断端点处的收敛性）.

2.幂级数在其收敛区间内的基本性质（连续性、逐项求导及逐项积分）.

3.用基本初等函数的马克劳林展开式将一些简单的初等函数展开为x或$x-a$ 的幂级数.

十五、多元函数的极限与连续

（一）知识要点

1.二元函数的几何意义，二元或三元函数的定义域.

2.二元函数极限的概念.

3.二元函数连续的概念.

（二）考核要求

了解内容

1.多元函数的概念，二元函数的几何意义.

2.有界闭域上连续函数的性质.

理解内容

1.二元函数的概念.

2.二元函数的二重极限与累次极限的定义及之间的关系.

掌握内容

1.二元函数连续的概念.

2.求二元或三元函数的定义域.

3.求较简单的二元函数的极限.

十六、多元函数微分学

（一）知识要点

1.偏导数、全微分、高阶偏导数，函数可微的充分条件与必要条件.

2.求复合函数偏导数的链式法则.

3.方向导数和梯度.

4.二元函数的极值.

（二）考核要求

了解内容

1.全微分的概念.

理解内容

1.偏导数及高阶偏导数的概念.

2.二元函数偏导数的几何意义.

3.方向导数和梯度.

掌握内容

1.函数可微的充分条件与必要条件.

2.求复合函数的偏导数（含抽象函数）及全微分.

3.求初等函数的高阶偏导数.

4.求二元函数的极值.

十七、隐函数定理及其应用

（一）知识要点

1.隐函数的偏导数

2.平面曲线的切线与法线，空间曲线的切线与法平面.

3.曲面的切平面与法线.

4.求多元函数极值的 Lagrange 乘数法.

（二）考核要求

了解内容

1.隐函数定理.

理解内容

1.隐函数的概念.

掌握内容

1.由方程 $f(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数的计算方法.

2.求平面曲线的切线方程与法线方程，空间曲线的切线方程与法平面方程.

3.求曲面的切平面方程与法线方程.

4.应用 Lagrange 乘数法求解一些最大值、最小值问题.

十八、含参变量积分

（一）知识要点

1.含参量积分的连续性、可微性、可积性.

2.含参变量反常积分一致收敛的维尔斯特拉斯 M 判别法.

（二）考核要求

了解内容

1.含参变量反常积分一致收敛的判别方法.

2.含参变量反常积分的连续性、可微性、可积性.

理解内容

1.含参量积分的概念.

2.含参变量反常积分一致收敛的概念.用维尔斯特拉斯 M 判别法判别含参变量反常积分一致收敛.

掌握内容

1.用含参量积分的连续性求定积分的极限.

2.用交换积分顺序的方法求定积分.

十九、曲线积分

（一）知识要点

1.两类曲线积分性质.

2.两类曲线积分计算.

（二）考核要求

了解内容

两类曲线积分之间的关系.

理解内容

1. 两类曲线积分的概念.

2. 两类曲线积分的性质.

掌握内容

1. 第一型曲线积分的计算.

2. 第二型曲线积分的计算.

二十、重积分

（一）知识要点

1. 二重积分的概念及性质.

2. 二重积分的计算.

3. 二重积分的应用.

4. 格林公式，曲线积分与路径无关的条件.

（二）考核要求

了解内容

1. 二重积分的概念.

理解内容

1. 二重积分的性质

掌握内容

1. 直角坐标系下计算二重积分，选择积分次序与交换积分次序.

2. 用极坐标变换计算二重积分.

3. 用二重积分解决简单的应用问题（限于空间曲面所围成的体积、曲面的面积、平面薄板质量）.

4. 格林（Green）公式，曲线积分与路径无关的条件，并应用于曲线积分的计算中.

第二部分：高等代数

Ⅰ 课程简介

一、内容概述与总要求

参加考试的考生应理解或了解《高等代数》中多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换和欧氏空间的基本概念、定理、性质和方法，能运用本门课程的基础知识和基本方法进行判断、分析、计算和证明；应具有较好的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力；具备一定的分析、解决问题的能力。考试从三个层次上对考生进行测试，较高层次的要求为“理解”和“掌握”，较低层级的要求为“了解”。这里“理解”和“了解”两词分别是对概念、理论的高层次与低层次要求。“掌握”是对方法、运算的高层次要求。本说明下列用语的含义：了解是指清楚地知道，理解是指懂得涵义、特征以及与相关理论的关系，运用是指用以解决基本问题，掌握是指理解并能运用。

二、考试形式与试卷结构

考试形式：采用闭卷、笔试形式，全卷满分为 300 分，考试时间为 150 分钟。

试卷结构：试卷包括选择题、填空题、判断题、计算题、证明题和应用题。选择题是四选一型的单项选择题；填空题只要求直接填写结果，不必写出计算过程或推证过程；计算题、证明题均应写出文字说明、演算步骤或推证过程。

试卷中《数学分析》、《高等代数》与《解析几何》试题的分值比例约为 150:110:40

Ⅱ 知识要点与考核要求

一、多项式

1. 知识要点

数域 P 上一元多项式的概念、基本运算和运算律；多项式整除的概念和性质，带余除法；最大公因式的概念和性质，辗转相除法；多项式互素的概念和性质；不可约多项式的概念和性质；多项式根的概念和性质；复数域上多项式不可约的充要条件，复数域上多项式根的个数，实系数多项式的非实复数根的特征，实数域上多项式不可约的充要条件；Eisenstein 判别法，求整系数多项式有理根的方法.

2. 考核要求

（1）掌握数域 P 上一元多项式的概念、基本运算和运算律.

（2）掌握多项式整除的概念和性质，掌握带余除法.

（3）掌握最大公因式的概念、性质，掌握辗转相除法，掌握多项式互素的概念和性质.

（4）掌握不可约多项式的概念和性质.

（5）理解多项式根的概念和性质.

（6）掌握复数域上多项式不可约的充要条件，掌握复数域上多项式根的个数，掌握实系数多项式的非实复数根的特征，掌握实数域上多项式不可约的充要条件.

（7）理解有理数域上多项式与整系数多项式的关系，掌握求整系数多项式有理根的方法，掌握 Eisenstein 判别法.

二、行列式

1.知识要点

排列及其逆序数，排列的奇偶性，行列式的概念，行列式的性质，余子式和代数余子式，行列式按一行（列）展开定理，Vandermonde 行列式，克拉默（Cramer）法则。

2.考核要求

（1）掌握排列的概念，掌握排列逆序数的概念和求法，理解排列的奇偶性.

（2）理解行列式的定义.

（3）掌握行列式的性质，掌握行列式按一行（列）展开定理.

（4）会计算具体行列式的值，会计算简单 n 阶行列式的值，理解 Vandermonde 行列式.

（5）了解克拉默法则.

三、线性方程组

1.知识要点

矩阵的概念，矩阵的初等变换，矩阵的秩；用消元法解线性方程组；线性方程组有解的判定定理；齐次线性方程组基础解系的概念和求法，线性方程组解的结构.

2.考核要求

（1）理解矩阵的概念.

（2）掌握矩阵的初等变换，理解矩阵秩的概念，掌握求矩阵秩的方法.

（3）掌握消元法解线性方程组.

（4）理解线性方程组有解的判定定理.

（5）掌握齐次线性方程组基础解系的概念及求法.

（6）了解线性方程组解的结构.

四、矩阵

1.知识要点

矩阵的基本运算和运算律；可逆矩阵和逆矩阵的概念和性质，矩阵可逆的充要条件，伴随矩阵的概念，矩阵与其伴随矩阵的关系，求逆矩阵的方法；n 阶矩阵乘积的行列式.

2.考核要求

（1）掌握矩阵的基本运算和运算律，理解对称矩阵反对称矩阵的概念.

（2）掌握可逆矩阵和逆矩阵的概念和性质，掌握矩阵可逆的充要条件，

（3）理解伴随矩阵的概念，掌握矩阵与其伴随矩阵的关系.

（4）掌握求逆矩阵的方法.

（5）会解简单矩阵方程.

（6）掌握矩阵乘积的行列式.

五、二次型

1.知识要点

二次型的定义，二次型的矩阵表示；矩阵的合同，矩阵的合同变换；二次型的标准形，复数域上和实数域上二次型化成典范形，惯性指数；正定二次型，正定矩阵.

2．考核范围

（1）理解二次型的概念，会写出二次型的矩阵.

（2）理解矩阵的合同概念及性质，掌握矩阵的合同变换.

（3）掌握利用矩阵的合同变换求可逆变量替换，把二次型化成标准形.

（4）掌握利用矩阵的合同变换求可逆变量替换，把复数域上和实数域上二次型化成典范形，理解惯性指数的概念.

（5）掌握正定二次型、正定矩阵的概念，掌握矩阵是正定矩阵的充要条件.

（6）掌握求正交变量替换化二次型为标准形的方法.

六、线性空间

1．知识要点

线性空间的定义，向量的运算及其性质（运算律）；向量的线性组合、线性相关与线性无关及其主要性质，向量组的极大线性无关组，向量组的秩；行向量和列向量，线性空间的基和维数，向量坐标的概念；线性子空间的定义，线性空间的子集是子空间的充要条件，向量组生成子空间的定义，子空间的交、子空间的和.

2．考核范围

（1）了解线性空间的定义；掌握向量的运算及其性质（运算律）.

（2）掌握向量的线性组合、线性相关与线性无关及其主要性质，掌握向量组的极大线性无关组的概念，

理解向量组秩的概念.

（3）理解行向量和列向量的含义，掌握行向量组的秩和列向量组的秩的求法.

（4）理解线性空间的基和维数.

（5）理解向量坐标的概念.

（6）了解线性子空间的定义，掌握线性空间的子集是子空间的充要条件；理解向量组生成子空间的定义；理解子空间的交、子空间的和.

七、线性变换

1.知识要点

线性变换的概念、性质、运算和运算律；线性变换与矩阵的关系，矩阵的相似；矩阵的特征值和特征向量的概念和求法，线性变换的特征值和特征向量的概念和求法；矩阵和线性变换对角化的定义、条件和方法.

2．考核范围

（1）掌握线性变换的概念、性质、运算和运算律.

（2）理解线性变换与矩阵的关系.

（3）理解矩阵相似的概念及性质.

（4）掌握矩阵的特征值，特征向量的概念和求法，掌握线性变换的特征值，特征向量的概念和求法.

（5）掌握矩阵和线性变换对角化的定义、条件和方法.

八、欧氏空间

1.知识要点

欧氏空间的概念，向量内积的性质；向量长度、单位向量、向量夹角、向量正交的概念，正交向量组和标准正交基的概念，施密特正交化方法，正交矩阵；正交变换的概念和性质；实对称矩阵的性质，实对称矩阵的正交对角化.

2．考核范围

（1）掌握欧氏空间的概念，掌握向量内积的性质；掌握向量长度、单位向量、向量夹角、向量正交的概念.

（2）掌握正交向量组和标准正交基的概念，了解施密特正交化方法；掌握正交矩阵的概念和性质.

（3）掌握正交变换的概念和性质.

（4）掌握实对称矩阵的性质，掌握实对称矩阵的正交对角化方法.

第三部分：解析几何

I.课程简介

一、内容概述与要求

参加考试的考生应理解向量的概念及其运算和应用，掌握空间平面、直线方程的求法及相关位置的解析条件，了解《解析几何》中方程（主要是三元一次、三元二次方程）与空间图形的联系，培养学生对空间图形的直观想象能力及运用几何知识和方法解决实际问题的能力，使学生在较高的理论水平基础上，处理后续数学课程中与图形有关的问题。考试从三个层次上对考生进行测试，较高层次的要求为“理解”和“掌握”，较低层级的要求为“了解”。这里“理解”和“了解”两词分别是对概念、理论的高层次与低层次要求。“掌握”是对方法、运算的高层次要求。本说明下列用语的含义：了解是指清楚地知道，理解是指懂得涵义、特征以及与相关理论的关系，运用是指用以解决基本问题，掌握是指理解并能运用。

二、考试形式与试卷结构

考试形式：采用闭卷、笔试形式，全卷满分为 300 分，考试时间为 150 分钟。

试卷结构：试卷包括选择题、填空题、判断题、计算题、证明题和应用题。选择题是四选一型的单项选择题；填空题只要求直接填写结果，不必写出计算过程或推证过程；计算题、证明题均应写出文字说明、演算步骤或推证过程。

试卷中《数学分析》、《高等代数》与《解析几何》试题的分值比例约为 150:110:40

II.知识要点与考核要求

一、向量与坐标

（一）向量与坐标

1.知识要点

向量的概念；向量加法；数量乘向量；向量的线性关系与向量的分解；标架与坐标；向量在轴上的射影；两向量的数量积；两向量的向量积；三向量的混合积；三向量的双重向量积。

2.考核要求

（1）了解向量的线性组合、线性相关的定义及直线、平面、空间向量线性分解的唯一性定理；了解标架与坐标的意义，坐标系与卦限的相关概念；了解三向量双重向量积的定义和运算。

（2）理解向量的相关概念及其表示，共线向量与共面向量，向量的线性相关与线性无关，向量的线性相关性定理；理解向量在轴上的射影与射影向量的定义与性质。

（3）掌握用平行四边形法则和三角形法则做向量的加法和减法；掌握数量乘向量的定义及运算规律，掌握数乘向量的坐标运算；掌握两向量数量积的定义和运算规律，两向量垂直的充要条件，两向量数量积的坐标表示，两向量夹角的计算；掌握向量积的定义和运算规律，两向量共线的充要条件，向量积的坐标表示；掌握三向量混合积的定义和性质，三向量共面的充要条件，三向量混合积的坐标表示。

二、轨迹与方程

1.知识要点

平面曲线的方程；曲面的方程；球坐标系与柱坐标系；空间曲线的方程。

2.考核要求

（1）了解常见曲线与曲面的参数方程及其图形，同一曲线、曲面的参数方程有多种不同形式。

（2）理解曲线、曲面方程的意义，能根据已知条件选取适当坐标系，建立曲线、曲面方程。

（3）掌握曲线、曲面参数方程的概念，熟悉曲线、曲面的参数方程与普通方程的互化。

三、平面与空间直线

1.知识要点

平面的方程；点与平面的相关位置；两平面的相关位置；空间直线方程；直线与平面的相关位置；空间直线与点的相关位置；空间两直线的相关位置；平面束。

2.考核要求

（1）了解空间直线参数方程中参数几何意义。

（2）理解点到平面的距离和点与平面间的离差的区别和联系；理解空间两异面直线间的距离及空间两异面直线的公垂线相关概念；理解平面束的相关概念和应用。

（3）掌握平面与空间直线的各种形式的方程，根据决定平面或决定直线的各种几何条件导出它们的方程，根据平面和直线的方程以及点的坐标判断有关点、直线、平面之间的位置关系与计算它们之间的距离与交角。

四、柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

1.知识要点

柱面及柱面方程，空间曲线对坐标面的射影柱面；锥面及其方程，锥面方程的特征；旋转曲面及方程、特殊旋转曲面的认识；椭球面与双曲面；椭圆抛物面与双曲抛物面；平行截割法；单叶双曲面与双曲抛物面的直母线。

2.考核要求

（1）了解椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面的标准方程。了解用平行截割法认识曲面的大致形状。

（2）理解母线平行于坐标轴的柱面方程，理解以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程，理解单叶双曲面与

双曲抛物面的直纹性。

（3）掌握求柱面、锥面、旋转曲面方程的一般方法与步骤。

III. 模拟试卷及参考答案

河北省普通高等学校专升本考试

数学与应用数学专业模拟试卷

（考试时间：150 分钟）

（总分：300 分）

说明：请在答题纸的相应位置上作答，在其它位置上作答的无效。

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。请将答案填写在答题纸的相应位置上。）

1. 设 $y=x^{\sin x}$，则 $y'=$____________________.

2. 设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$， 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________________.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$________________.

4. $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int xf'(x)dx=$_______________.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$__________， $b=$_________.

6. 设行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ 中，代数余子式 $A_{21}=0$，则 $a=$_________.

7. 设 P、Q 都是可逆矩阵，若 $PXQ=B$，则 $X=$_________.

8. 直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-3}$ 与平面 $x+ky-3z+1=0$ 平行，则 $k=$_________.

二、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个备选项中，选出一个正确的答案，并将所选项前的字母填写在答题纸的相应位置上。）

9. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}\right)^n=$（　　）.

A．e^{-2}　　　　B. 1　　　　C. e　　　　D. e^{-1}

10. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 的敛散性是（　　）.

A.绝对收敛　B.条件收敛　C.发散　D.可能收敛，也可能发散

11.下列级数中条件收敛的是（　）.

A. $\sum\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^n}$　　B. $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

C. $\sum(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$　　D. $\sum\frac{(-1)^n(\sin n+\cos n)}{n^2}$

12. 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^2+3y^2+2z^2-1=0$ 所确定的隐函数，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

A. $-\frac{2z}{3y}$　B. $-\frac{x}{2z}$　C. $-\frac{3y}{2z}$　D. $\frac{3y}{2z}$。

13. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$　（　）.

A. 等于 $\frac{1}{2}$　B. 等于 0　C. 等于 $\frac{k}{1+k^2}$　D. 不存在

14. 下列对于多项式的结论不正确的是（　）.

A.如果 $f(x)|g(x),g(x)|f(x)$，那么 $f(x)=g(x)$

B.如果 $f(x)|g(x),f(x)|h(x)$，那么 $f(x)|(g(x)\pm h(x))$

C.如果 $f(x)|g(x)$，那么 $\forall h(x)\in F[x]$，有 $f(x)|g(x)h(x)$

D.如果 $f(x)|g(x),g(x)|h(x)$，那么 $f(x)|h(x)$

15.对于 n 阶实对称矩阵 A，以下结论正确的是（　）.

A.一定有 n 个不同的特征值　B.存在正交矩阵 P，使 $P'AP$ 成对角形

C.它的特征值一定是整数　D.属于不同特征值的特征向量必线性无关，但不一定正交

16.两平面 $2x-y+2z+1=0$ 与 $2x-y+2z-2=0$ 间的距离为(　).

A.1　B.2　C.3　D.4

三、判断题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。正确的划“√”，错误的划“×”，请将答案填涂在答题纸的相应位置上。）

17. 二元函数 $f(x,y)=x^2-5y^2-6x+10y+6$ 在点(3,1)取得极值.　（　）

18. 设 L 为不通过原点的按段光滑的闭曲线，则 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$.　（　）

19. 若 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}+e^{x} & x\neq 0\\ a^{2}+\cos x & x=0\end{cases}$ 是连续函数，则 $|a|=e$. （ ）

20. 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上连续，则 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$. （ ）

21. 若 $f(x)$ 在 x_0 可导, 并且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0+2h)}{h}=1$ ，则 $f'(x_0)=-\dfrac{1}{4}$. （ ）

22. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$s>1$）线性相关，则存在某个向量是其余向量的线性组合. （ ）

23. 实对称矩阵为正定的充要条件是它的所有顺序主子式都非负. （ ）

24. 平面 $2x-y-2z-5=0$ 与 $x+3y-z-1=0$ 的位置关系为相交. （ ）

四、计算题（本大题共 5 小题，每小题 20 分，共 100 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

25. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数，并指出收敛域.

26. 设 D 为 xy 面上的区域：$4\le x^2+y^2\le 9$，求 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

27. a,b 取什么值时, 方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b\end{cases}$$

有解？在有解的情形下, 求一般解.

28. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为 V 的基，且线性变换 σ 在此基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

（1）求 σ 的特征值与特征向量；

（2）σ 是否可以对角化？如果可以，求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.

29. 求通过点 $M_1(1,-5,1)$ 和 $M_2(3,2,-2)$ 且垂直于 xoy 坐标面的平面的坐标式参数方程和一般方程.

五、证明题（本大题共 3 小题，每小题 20 分，共 60 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

30. 证明函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值没有最大值，并求其最小值.

31. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，

证明：β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，且表示法唯一.

32. 设 $A,B\in P^{n\times n}$ 是两个给定的 n 级矩阵，记 $W=\left\{X\,\middle|\,AX=XB,X\in P^{n\times n},\right\}$

证明：W 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的一个子空间.

六、应用题（本大题共 1 小题，共 20 分。请在答题纸的相应位置上作答。）

33. 求曲线形构件 $L:x=a$， $y=at$， $z=\dfrac{1}{2}at^2\ (0\le t\le 1,a>0)$ 的质量 M，其线密度为 $\rho=\sqrt{\dfrac{2z}{a}}$.

数学与应用数学专业参考答案

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 填对得 5 分，未填或填错得 0 分）

1. $x^{\sin x}(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x)$

2. $-\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{1}{t}$

3. $\dfrac{\pi}{2}$

4. $\cos x-2\dfrac{\sin x}{x}+C$

5. 2，-1.

6. 3

7. $P^{-1}BQ^{-1}$

8. -5

二、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 选对得 5 分，选错、未选或多选得 0 分）

9.D　10.A　11.B　12.C　13. D　14. A　15. B　16. A

三、判断题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 填对得 5 分，未填或填错得 0 分）

17. 错　18. 错　19. 错　20. 对　21. 对　22. 对　23. 错　24. 对

四、计算题（本大题共 5 小题，每小题 20 分，共 100 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

25. 解：此幂级数的收敛半径为 $R=1$，收敛区域为 $(-1,1)$ ……………………………………3 分

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\dfrac{x^4}{1-x^4}$ …………………………………………………… 6 分

$=-1-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ ……………………………………………9 分

$S(x)=\int_0^x S'(x)dx$ ……………………………………………………………………10 分

$=\int_0^x\left(-1-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}\right)dx$ ……………………………………12 分

$=-\int_0^x dx-\frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{x^2+1}dx$ ……………………………………………15 分

$=-x-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\arctan x$ ……………………………………………………20 分

26．解： 令 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$

在极坐标系下积分区域为 $\Delta: 2\le r\le 3\ 0\le\theta\le 2\pi$ ……………………………………………………4 分

所以 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint\limits_\Delta re^{-r^2}drd\theta$ ………………………………………………………8 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3 re^{-r^2}dr$ ………………………………………………………………………………12 分

$=\pi\int_2^3 e^{-r^2}d(r^2)$ …………………………………………………………………………………16 分

$=\pi\left[-e^{-r^2}\right]_2^3=\pi\left(\frac{1}{e^4}-\frac{1}{e^9}\right)$ ……………………………………………………………………20 分

27．解： $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$. ……………………………3 分

当 $a=0,b=2$ 时，$R(\overline{A})=R(A)=2$，则方程组有解. ……………………………………………………6 分

此时原方程组同解于

$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}(1)$， ……………………………………………………………8 分

(1)的导出组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}(2)$$

分别取自由未知量 x_3,x_4,x_5 为(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)，代入(2)则可解

得导出组的基础解系为

$\eta_1=(1,-2,1,0,0)$，$\eta_2=(1,-2,0,1,0)$，$\eta_3=(5,-6,0,0,1)$， …………………………………………16 分

再取自由未知量 x_3,x_4,x_5 为(0, 0, 0)代入(1)则可解得特解为

$\gamma_0=(-2,3,0,0,0)$， ……………………………………………18 分

那么一般解为

$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3, k_1, k_2, k_3$ 任意. ………………………………………… 20 分

28. 解：（1） $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$，…………………………………………4 分

所以 σ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -1$． ………………………………………………6 分

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时，由 $(\lambda_1 E - A)X = 0$ 得基础解系 $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，…………………………8 分

故属于 1 的线性无关的特征向量是 $\xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ $\quad \xi_2 = \varepsilon_2$，而属于 1 的全部特征向量是 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$（其中 k_1, k_2 为不全为零的任意常数）. ……………………………………………………………………10 分

当 $\lambda_3 = -1$ 时，由 $(\lambda_3 E - A)X = 0$ 得基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，故属于 -1 的线性无关的特征向量是 $\xi_3 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$，

属于 -1 的全部特征向量是 $k\xi_3$，（k 为不为零的任意常数）. ……………………………… 14 分

（2）因为 σ 有三个线性无关的特征向量，所以 σ 可以对角化. ……………………………16 分

令 $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $T^{-1}\mathrm{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. ……………………………………………20 分

29. 解：由于平面垂直于 xoy 面，所以它平行于 z 轴，即 $\{0,0,1\}$ 与所求的平面平行，又 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2,7,-3\}$，平行于所求的平面，……………………………………………………………………………4 分

所以要求的平面的参数方程为：$\begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = -5 + 7u \\ z = 1 - 3u + v \end{cases}$ ………………………………………10 分

平面的点位式方程为：$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ……………………………………15 分

一般方程为：$7(x-1) - 2(y+5) = 0$，即 $7x - 2y - 17 = 0$. ……………………………………20 分

五、证明题（本大题共 3 小题，每小题 20 分，共 60 分. 证明过程、步骤和答案必需完整、正确）

30. 证明：$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$，…………………………………………3 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x=e^{-2}$. ……………………………………………………………5 分

又因为当 $x\in(0,e^{-2})$ 时，$f'(x)<0$，……………………………………………………6 分

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. ……………………………………………………7 分

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处取得极小值，并且 $f(e^{-2})=\dfrac{-2}{e}$. ……………………………10 分

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个极值点，

所以 $f(x)$ 在 $x=e^{-2}$ 处取得最小值. ……………………………………………………12 分

又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}$ ……………………………………………………14 分

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-2\sqrt{x}\right)=0$，……………………………………………………16 分

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$. ……………………………………………………18 分

所以函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有最小值没有最大值，并且最小值是

$f(e^{-2})=\dfrac{-2}{e}$. ……………………………………………………………………20 分

31．证明：（1）由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0 \text{ ……………………5 分}$$

又由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，得 $k_{r+1}\neq0$（否则，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾），于是有

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{r+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r\text{；……………………10 分}$$

（2）设 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r$，$\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r$，则

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r，$$

$$(c_1-l_1)\alpha_1+(c_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(c_r-l_r)\alpha_r=0\text{，……………………17 分}$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，故 $c_1-l_1=0,c_2-l_2=0,\cdots,c_r-l_r=0$，

即 $c_i = l_i$（$i=1,2,\cdots,r$）. ··20 分

32. 证明 $\because 0 \in W, \therefore W \neq \varnothing$ ··2 分

对 $\forall k \in P$，$\forall X, Y \in W$，即 $AX = XB$, $AY = YB$，··6 分

有 $A(X+Y) = XB + YB = (X+Y)B$，··12 分

$A(kX) = k(BX) = B(kX)$，··18 分

所以 $X+Y \in W$，$kX \in W$，

故 W 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的一个子空间 ·· 20 分

六、应用题（本题 20 分. 解答过程、步骤和答案必需完整、正确）

33. 解：由第一型曲线积分的物理意义知

$M = \int_L \sqrt{\frac{2z}{a}} ds$ ··5 分

$= \int_0^1 t\sqrt{a^2 + a^2t^2}\, dt$ ··10 分

$= \frac{a}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, d(1+t^2)$ ··14 分

$= \frac{a}{3}\left[\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ ··16 分

$= \frac{a}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ ··20 分